16.1 函数的 Fourier 级数展开

2024年3月21日 星期四　14:47

三角级数

定义　函数列 $1, \cos x, \sin x, \cdots \cos nx, \sin nx$

称作三角函数列（三角函数系）

称如下的函数项级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为三角级数，其中 $a_n(n\geq 0)$ $b_n(n\geq 1)$ 为常数，称为三角级数的系数

定理：若 $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，则三角级数(5)在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

证：W－判别法

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0 \quad n\geq 1 \text{（关键）}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=0 \quad \text{当} n\neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx=0 \quad \forall n,m\geq 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\pi\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 n\pi\,dx=\pi \quad (n\geq 1)$$

三角函数系的正交性

定义：若函数 φ 与 ψ 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx=0$

则称 φ 与 ψ 在 $[a,b]$ 上是正交的

若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$　$x\in[-\pi,\pi]$

并且该三角级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛

在 $[-\pi,\pi]$ 上逐项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=a_0\pi$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

若要求 a_k

则两边同乘 $\cos kx$

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx\cos kx+\cdots)$$

此时右端的三角函数在 $[-\pi,\pi]$ 上也是一致收敛的

令 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$

$$\tilde{S}_n(x)=\frac{a_0\cos kx}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx\cos kx+\cdots)$$

则 $|\tilde{S}_n(x)-f(x)\cos kx| = |S_n(x)-f(x)|\,|\cos kx|$

$\le |S_n(x)-f(x)|$

定理：若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 在 D 上 $\exists M>0,\ \forall x\in D$，有 $|g(x)|\le M$.

则 $f_n(x)g(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$

$\Big\Downarrow$ 逐项积分

若 $\left.\begin{array}{l} f_n(x)\rightrightarrows f(x) \\ g_n(x)\rightrightarrows g(x)\end{array}\right\}$ 在 D 上一致有界

$f_n(x)g_n(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = a_k\cdot\pi \Rightarrow a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

同理可得 $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$

定义：设 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数

则 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$，$n=0,1,\cdots$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$，$n=1,2,\cdots$

称为 f 的傅里叶系数

以 f 的傅里叶系数的三角级数称作 f 的傅里叶级数

收敛定理1 若 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

当 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ 存在时，有 $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_m(t) \to \dfrac{f(x+0)}{2}\quad (m\to\infty)$

当 $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$ 存在时，有 $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_m(t) \to \dfrac{f(x-0)}{2}\quad (m\to\infty)$

特别地，当 f 在 x 点的广义左、右导数都存在时，有 $S_m(x)\to \dfrac{f(x+0)}{2}+\dfrac{f(x-0)}{2}$

定义 若 f 的导函数在 $[a,b]$ 上连续，则称 f 在 $[a,b]$ 上光滑

若 f 在 $[a,b]$ 上有定义，称 f 在 $[a,b]$ 上"按段光滑"，若存在

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得

(1) $\forall 1\le i\le n$，有 f 在 (x_{i-1},x_i) 上存在连续的导函数

(2) $\forall 0\le i\le n$，有 f 在 x_i 处存在左右极限（f 在 x_0, x_n 存在右、左极限）

(3) $\forall 0\le i\le n$，有 f 在 x_i 处存在广义左、右导数（f 在 x_0, x_n 存在广义右左导数）

（可换为 $\forall 0\le i\le n$，有 f' 在 x_i 处存在左、右极限（f' 在 x_0 与 x_n 处分别存在右极限左极限））

说明：$\underbrace{\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_i+t)-f(x_i+0)}{t}}$ 必存在且等于 $f'(x_i+0)$

利用L-中值定理 $=f'(\xi_{x_i,t})\to f'(x_i+0)\quad (t\to 0^+)$

$\forall 0<t<x_{i+1}-x_i$

令 $\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(x_i,x_i+t] \\ f(x_i+0), & x=x_i\end{cases}$

则 $\hat{f}$ 在 $[x_i,x_i+t]$ 上连续

收敛定理2 若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑的函数，则

$\forall x\in[-\pi,\pi]$（从而 $\forall x\in\mathbb{R}$），有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

其中 $a_n\ (n\ge 0)$ $b_n\ (n\ge 1)$ 是 f 的傅里叶系数

注：在具体讨论函数的傅里叶级数的展开式，通常只给出函数 f 在 $[-\pi,\pi)$

（或 $(-\pi,\pi]$ 或 $(c,c+2\pi]$ 上）的函数值

此时，先把 f 延拓成 2π 周期的函数 $\hat{f}$，

则 f 的傅里叶级数就是 $\hat{f}$ 的傅里叶级数

特别地 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)\cos nx\,dx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}\tilde{f}(x)\cos nx\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad, n=0,1,2,\cdots$

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad n=1,2,\cdots$

16.2 Fourier级数的收敛判别法

研究 Fourier 级数在什么情况下收敛

收敛的时候又收敛到什么值

2024年3月26日 星期二 12:05

预备定理 (Bessel不等式)，设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$ (必定相等 Parseval 等式)

证：令 $S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

则 $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_m(x))^2dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\underbrace{-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\,dx}_{(I)}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)\,dx}_{(II)}$$

$$(I)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}f(x)+\sum_{n=1}^{m}(a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx)\right]dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\pi a_0+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cdot\pi a_n+b_n\pi b_n)=\pi\cdot\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\right]$$

$$(II)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{(a_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}((a_n\cos nx)^2+(b_n\sin nx)^2\right]dx$$

$$=\left(\frac{a_0^2}{2}\right)\cdot 2\pi+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2\pi+b_n^2\pi)=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\right]$$

于是有 $0\le\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\right]$

由m的任意性，Bessel不等式成立

右端收敛

推论：设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$$

推论2：设 f 在 $[0,\pi]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx=0$

$[-\pi,0]$ $\int_{-\pi}^{0}$

注意到 $f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x=(f(x)\cos\frac{1}{2}x)\sin nx+(f(x)\sin\frac{1}{2}x)\cos nx$

令 $F_1(x)=\begin{cases}f(x)\cos\frac{1}{2}x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\in[-\pi,0)\end{cases}$，$F_1(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积

由推论1知 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)\cos\frac{1}{2}x)\sin nx=0$

同理 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)\sin\frac{1}{2}x)\cos nx=0$

从而推论(2)成立

(一般地，设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,dx=\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,dx=0$)

预备定理2：设 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则其傅里叶级数

预备定理2：设 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则其傅里叶级数的部分和函数满足：

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_m(t)\,dt,$$

其中 $D_m(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt=\begin{cases}\sin(m+\frac{1}{2})t\Big/2\sin\frac{t}{2}, & t\neq 0\\ \frac{1}{2}+m, & t=0\end{cases}$

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,du+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos nu\cos nx\,du+\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin nu\sin nx\,du\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}(\cos nu\cos nx+\sin nu\sin nx)\right]du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n(u-x)\right]du$$

$f(x)$ 以 2π 为周期

$$\overset{令t=u-x}{=\!=\!=}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(t+x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt$$

$$=\!=\!=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt$$

令 $D_m(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt$ —— 称为 Dirichlet 和

则当 $t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ 时，有 $\sin\frac{t}{2}\neq 0$，从而

$$D_m(t)=\frac{\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right)\cdot 2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin(m+\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}\quad(在\ \sin\tfrac{t}{2}\neq 0\ 时)$$

当 $t=0$ 时 $D_m(t)=\frac{1}{2}+m=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

要证：在合适的条件下（充分条件）

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt\longrightarrow\frac{f(x+0)}{2}\quad(1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)D_m(t)\,dt\longrightarrow\frac{f(x-0)}{2}\quad(2)$$

注意到 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_m(t)\,dt=\frac{1}{2}$ $\quad\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}D_m(t)\,dt=\frac{1}{2}$

（由 $D_m(t)$ 的原定义可得）

于是 $\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+0)D_m(t)\,dt$

所以只要有

$$\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]D_m(t)\,dt\longrightarrow 0\quad(\Rightarrow(1)式成立)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt\longrightarrow 0$$

令 $\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$

只要 φ 在 $[0,\pi]$ 上可积，就有 (1) 式成立，由条件知

$\forall [a,b]\subset R$，都有 $f(x+t)-f(x+0)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

又 $\forall 0<\delta<\pi$，有 $\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[\delta,\pi]$ 上可积，所以 $\forall 0<\delta<\pi$，$\varphi(t)$ 在 $[\delta,\pi]$ 上可积

性质：设 g 是定义在 $[0,\pi]$ 上的函数，若 $\forall 0<\delta<\pi$，有 g 在 $[\delta,\pi]$ 上可积，

且 g 在 $[0,\pi]$ 上有界，则 g 在 $[0,\pi]$ 上可积

(此时，条件"可换作 $\lim\limits_{t\to0^+}g(t)$ 存在，也可换作 g 在 0 点的某个右邻域有界)

由于 g 在 $[0,\pi]$ 上有界，设 $|g|\le M$，

$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta\in[0,\pi]$ 使 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{4\pi}$ 由 g 在 $[\delta,\pi]$ 上可积，对于分割 $T_1=\{\delta=x_1<\cdots<x_n=\pi\}$

$\sum\limits_{i=2}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$，于是令 $T=\{0\}\cup T_1$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i=w_1\Delta x_1+\sum\limits_{i=2}^{n}w_i\Delta x_i<2M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M}+\varepsilon=2\varepsilon$

于是，只要 $\varphi(t)$ 在 0 点某个右邻域内有界，就有 (1) 式成立

充分条件 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin t/2}$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ (广义右导数) 存在

同理可证：只要 $\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{\sin t/2} & t\in[-\pi,0)\\ 0 & t=0\end{cases}$ 在 0 点的某个左邻域有界

就有 (2) 式成立. 充分条件 $\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$ (广义左导数) 存在

(应用 Lagrange 中值定理，可变为导函数在

左也存在极限)

收敛定理 1 若 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

当 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ 存在时，有 $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_m(t)\to\dfrac{f(x+0)}{2}$ $(m\to\infty)$

当 $\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$ 存在时，有 $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)D_m(t)\to\dfrac{f(x-0)}{2}$ $(m\to\infty)$

特别地，当 f 在 x 点的广义左.右导数都存在时，有 $S_m(x)\to\dfrac{f(x+0)}{2}+\dfrac{f(x-0)}{2}$

定义 若 f 的导函数在 $[a,b]$ 上连续，则称 f 在 $[a,b]$ 上光滑

若 f 在 $[a,b]$ 上有定义，称 f 在 $[a,b]$ 上"按段光滑"，若存在

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得

(1) $\forall 1\le i\le n$，有 f 在 (x_{i-1},x_i) 上存在连续的导函数

(2) $\forall 0\le i\le n$，有 f 在 x_i 处存在左右极限 (f 在 x_0, x_n 存在右.左极限)

(3) $\forall 0\le i\le n$，有f在x_i处存在广义左.右导数（f在x_0, x_n存在广义右左导数）

（可换为 $\forall 0\le i\le n$. 有f'在x_i处存在左.右极限（f'在x_0与x_n处分别存在右极限左极限））

说明：$\underbrace{\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_i+t)-f(x_i+0)}{t}}$ 必存在且等于 $f'(x_i+0)$

利用L-中值定理 $= f'(\xi_{x_i,t}) \to f'(x_i+0)$ $(t\to 0^+)$

$\forall 0<t<x_{i+1}-x_i$

令 $\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(x_i,x_i+t] \\ f(x_i+0), & x=x_i\end{cases}$

则 $\hat{f}$ 在 $[x_i,x_i+t]$ 上连续

收敛定理2 若f是以2π为周期且在$[-\pi,\pi]$上按段光滑的函数，则

☆ $\forall x\in[-\pi,\pi]$（从而 $\forall x\in\mathbb{R}$），有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

其中 $a_n\ (n\ge 0)$ $b_n\ (n\ge 1)$ 是f的傅里叶系数

注：在具体讨论函数的傅里叶级数的展开式，通常只给出函数f在$[-\pi,\pi)$

（或$(-\pi,\pi]$或$(c,c+2\pi]$上）的函数值

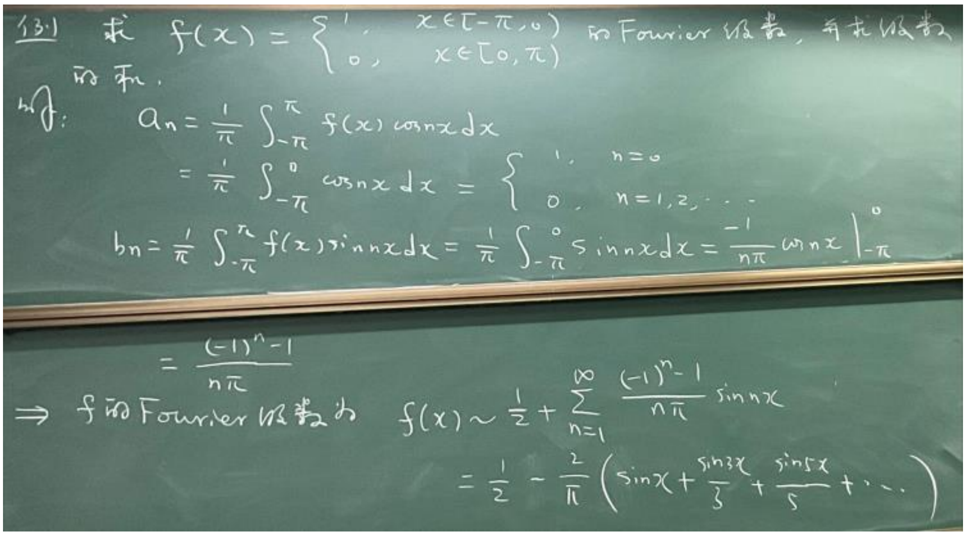
此时，先把f延拓成2π周期的函数$\hat{f}$，

则f的傅里叶级数就是$\hat{f}$的傅里叶级数

特别地 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)\cos nx\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}\hat{f}(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad n=1,2,\cdots$$



13.1 求 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}$ 的Fourier级数，并求级数的和.

解：$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n=1,2,\cdots\end{cases}$

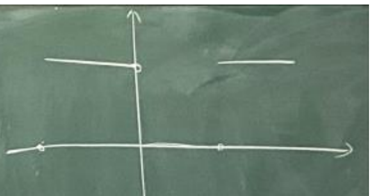
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx=\frac{-1}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}$

$=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$

$\Rightarrow$ f的Fourier级数为 $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\sin nx$

$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$

由 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑，



当 $x\in(-\pi,0)$ 时，上述右端收敛于 1

当 $x\in(0,\pi)$ 时，- - - - - 0

当 $x=0,\pm\pi$ 时，- - - - - - $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2}$

将 $x=\frac{\pi}{2}$ 代入，可得 $0=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$

正弦级数与余弦级数

在一个周期内是奇函数　　在一个周期内是偶函数

若 f 以 2π 为周期，且 f 是奇函数，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ \xlongequal{f(x)\cos nx\text{为奇函数}}\ 0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ \xlongequal{f(x)\sin nx\text{为偶函数}}\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

此时 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$　　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n\geq1)$

—— 正弦级数

类似的 若 f 以 2π 为周期，且是偶函数，则

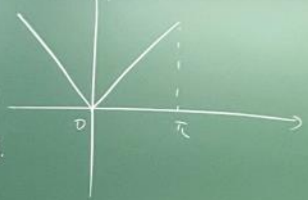
$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$　　$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,\cdots)$

例. 将 $f(x)=x\ (x\in[0,\pi])$ 分别展开为余弦级数和正弦级数

（并求级数的和）

解：① 余弦级数的情形

进行偶延拓．令 $\tilde{f}(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-\pi,0)\\ x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$.



$\Rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x)dx=\cdots=\pi$.

当 $n\geq1$ 时，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nx\,dx=\cdots=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$

$=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\frac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1\end{cases}$

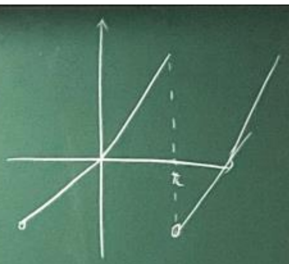
从而 f 的余弦级数为　$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.　　(1)

此时 $\tilde{f}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑且连续（而且是偶函数），

从而 $\forall x\in[0,\pi]$，(1) 式右端收敛于 $\tilde{f}(x)=f(x)=x$.

② 正弦级数的情形

进行奇延拓　令 $\tilde{f}(x)=x,\ x\in(-\pi,\pi]$



$\Rightarrow$ 当 $n\geq 1$ 时 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x)\sin nx\,dx$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d(\cos nx)$$

$$=\cdots=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$$

于是 f 的正弦级数为 $f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$　(2)

此时，$\forall x\in[0,\pi)$，(2)式右端收敛于 $\tilde{f}(x)=f(x)=x$

当 $x=\pi$ 时，. . . . . . . $\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0$.

设 $f(x)$ 是以 $2T$ 为周期的函数，其中 $T>0$

并设 $f(x)$ 在 $[-T,T]$ 上可积

令 $\varphi(t)=f(\frac{T}{\pi}\cdot t)$，$t\in\mathbb{R}$

则 φ 是以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数

从而 φ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\cos nt)$　(3)

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{T}{\pi}\cdot t)\cos nt\,dt\ \overset{令\ x=\frac{T}{\pi}t}{=\!=\!=}\ \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx$$

重复(3)式：$f(x)=f(\frac{T}{\pi}\cdot\frac{\pi}{T}x)=\varphi(\frac{\pi}{T}x)$

$$\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T})$$

当 f 在 $[-T,T]$ 上按段光滑时，上式右端收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

例　求 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0)\\ x^2, & x\in[0,1)\end{cases}$ 的傅里叶级数.

解. 将 f 看作以 2T 为周期的函数，其中 $T=1$　此时傅里叶系数为:

$n\geq 1$ 时，$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\cdots=\frac{2\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}$

$$a_0=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_{0}^{1} x^2 \sin n\pi x\,dx = \cdots$$

$$= \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2\cdot[(-1)^n-1]}{n^3\pi^3}}$$

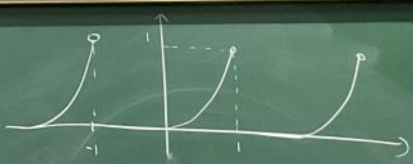
从而f的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \cdot\sin n\pi x\right] \quad (5)$$

$\forall x\in(-1,0)$，(5)式右端收敛于0

$\forall x\in[0,1)$，- - - - - - - x^2

当 $x=\pm1$时，- - - - - - - $\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$



将$x=1$代入(5)式，可得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$

16.3 Fourier级数的性质

2024年3月28日 星期四 14:02

性质：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数的傅里叶级数的必要条件是 (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \text{ 收敛} \quad \left(\text{若发散，则 } \int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \text{ 发散}\right)$$

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐点收敛，但由 $\sum\frac{1}{n}$ 发散。

所以它不能是满足条件(*)的函数的傅里叶级数。

性质：设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$

设 a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数

设 a_n', b_n' 为 f' 的傅里叶系数

则：$a_0'=0,\ a_n'=nb_n,\ b_n'=-na_n\ (n\ge1)$

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\\ &\text{“逐项求导”}\ \Downarrow\\ &f'(x)=0+\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)\end{aligned}}$$

证：$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,dx \overset{N-L}{=\!=} \frac{1}{\pi}\cdot f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx = f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}nf(x)\sin nx\,dx$

$=n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n$

$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx = f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=-na_n$

性质：设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$
(按段光滑且连续)

则 f 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$

只要证：f 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛

只要证：$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛（优级数）

已有 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2+b_n'^2)$ 收敛（由 Bessel 不等式的推论可得）

$|a_n|+|b_n|=\frac{|b_n'|}{n}+\frac{|a_n'|}{n}$

$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+b_n'^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+a_n'^2\right) \Rightarrow$ 从而收敛

令 T_n 表示 n 阶三角多项式

$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$ 的全体

设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数，$a_0, a_k, b_k\ (k\ge1)$ 为 f 的傅里叶系数

则 f 的傅里叶级数的部分和函数

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是 f 在 T_n 中的最佳逼近元素，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2=\min\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2dx: g\in T_n\right\}.$$

Weierstrass 第二逼近定理

对周期为 2π 的任意一个连续函数 f，都存在三角多项式序列

$$\left\{\Psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right\}$$

使得 $\{\Psi_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 f.